ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

(Ημερομηνία αποστολής στον φοιτητή: 20 Νοεμβρίου 2004. Τελική ημερομηνία αποστολής από τον φοιτητή: 21 Δεκεμβρίου 2004)

Οι ασκήσεις 1- 4 αναφέρονται στο Κεφάλαιο 4: Διανυσματικοί Χώροι. Εδώ συναντάμε μερικές θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας όπως είναι ο διανυσματικός χώρος, η γραμμική ανεξαρτησία, η βάση και η διάσταση.

Άσκηση 1 (9 μονάδες)

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $U=\{(x,y,z)\,|\,3x+5y+z=1\}$
2. $V=\{(x,y,z)\,|\,3x^2+5y+z=0\}$
3. $W=\{(x,y,z)\,|\,3x+5y+z=0\}$.

Άσκηση 2 (12 μονάδες)

Έστω $a\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τα στοιχεία $u=(1,1,1), v=(2,1,1), w=(1,a,2)$ του $\mathbb{R}^3$.

1. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το $(0,1,1)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα u,v,w.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ Παράδειγμα 4.3 του βιβλίου.

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

1. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,0,0),(1,0,1,0),(3,1,2,0),(0,0,1,1)$.
   i) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του V.
   ii) Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα που είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V.
2. Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας με 1^{η} γραμμή τη $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ. Παράδειγμα 4.21.

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

Έστω $\mathbb{R}_3[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 3.

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B=\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Να παρασταθεί το x^3 σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης B.

Στις ασκήσεις 5 και 6 αναφερόμαστε στο Κεφάλαιο 5: Γραμμικοί Μετασχηματισμοί.

Άσκηση 5 (12 μονάδες)
Εξετάστε ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y)=(x+1, 3y, y-x)$
   $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad g(x,y,z)=(2x-3y+4z)$
   $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x,y)=(2x+y,\ x+2y)$
2. Στο χώρο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τη κανονική βάση $e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)$ και τη νέα βάση $t_1=(1,-1),\ t_2=(2,1)$. Να βρεθεί ο αντίστοιχος πίνακας αλλαγής βάσης, καθώς και οι νέες συντεταγμένες του σημείου (x,y) στη βάση $t_1,\ t_2$.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ. σελίδα 97.

Άσκηση 6 (10 μονάδες)
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$.

1. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του πυρήνα της f.
2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση της εικόνας της f.

Οι επόμενες ασκήσεις αναφέρονται στο Κεφάλαιο 6: Χαρακτηριστικά Μεγέθη. Οι έννοιες της ιδιοτιμής, του ιδιοδιανύσματος και της διαγωνοποίησης πινάκων είναι θεμελιώδεις και έχουν πολλές εφαρμογές.

Άσκηση 7 (18 μονάδες)
Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

1. Δείξτε ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται και εκτελέστε την διαγωνοποίησή του.
2. Δείξτε ότι ο πίνακας B δεν διαγωνοποιείται.
3. Να υπολογιστεί ο A^n και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίστε το $I+A+A^2+\ldots+A^{2004}$.

Άσκηση 8 (14 μονάδες)
Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.
2. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^T AP$ να είναι διαγώνιος.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ Παράδειγμα 6.12.

Άσκηση 9 (10 μονάδες επί πλέον)

Η άσκηση που ακολουθεί είναι προαιρετική και μπορεί να λυθεί στον υπολογιστή σας με τη βοήθεια του MATLAB ή του προγράμματος «κλώνου» του Octave. Η λύση της άσκησης μπορεί να γίνει με τις ίδιες εντολές και στα δύο προγράμματα.

Το MATLAB είναι εμπορικό προϊόν και δεν διατίθεται δωρεάν. Η Octave διατίθεται δωρεάν και μπορεί να κατέβει από το www.octave.org και στο link Downloads ή απευθείας από το www.octave.org/download.html Από εκεί μπορείτε να οδηγηθείτε εύκολα στην ιστοσελίδα από όπου μπορείτε να την κατεβάσετε. Η έκδοση που θα πρέπει να κατεβάσετε είναι binary για windows και το αρχείο octave-2.1.50a-inst.exe με μέγεθος περίπου 7.5 MB. Η εγκατάσταση γίνεται απλά με διπλό πάτημα του αρχείου.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Κεφάλαιο 7 του βιβλίου της Γραμμικής Άλγεβρας. Επίσης, στην ιστοσελίδα της θεματικής μας ενότητας θα αναρτηθεί υλικό σχετικό με το MATLAB. Βοήθεια για τη χρήση μίας εντολής, π.χ. της inv( ) μπορεί να βρεθεί με τη χρήση της εντολής

```
help inv
```

Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσετε MATLAB η μεταφορά των εντολών σας αλλά και των αποτελεσμάτων σε κειμενογράφο γίνεται εύκολα με αντιγραφή και επικόλληση. Για το Octave, που δεν είναι φτιαγμένο ειδικά για Microsoft Windows, προτείνουμε την εξής διαδικασία:

Δημιουργείστε ένα φάκελο στον σκληρό δίσκο του υπολογιστή σας με όνομα της επιλογής σας π.χ. workplace. Αν ο σκληρός σας δίσκος είναι ο C: εκτελέστε στην octave την εντολή

```
cd c:\workplace
```

Μετά την εκτέλεση της εντολής

```
diary namefile.txt
```

ότι πληκτρολογείτε και ότι εμφανίζεται στην Octave γράφεται στο αρχείο namefile.txt. Φυσικά μπορείτε να διαλέξετε ότι όνομα αρχείου θέλετε αλλά καλό είναι να βάλετε την επέκταση txt ώστε το αρχείο να μπορεί να ανοιχτεί με έναν editor όπως το notepad. Για να σταματήσει η καταγραφή των εντολών και των αποτελεσμάτων εκτελέστε την εντολή:

```
diary off
```

Στη άσκηση που ακολουθεί θα παραδώσετε ως λύση τόσο τις εντολές που πληκτρολογήσατε όσο και τα αποτελέσματα που σας επέστρεψε το πρόγραμμα. ¨οπου χρειάζεται συμπληρώστε τα σχόλιά σας.

Ορίστε στο MATLAB ή στην Octave τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

1. Με τη χρήση της συνάρτησης poly( ) να βρεθούν οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα. Στη συνέχεια, με τη χρήση της εντολής roots( ) να υπολογιστούν οι ρίζες του δηλαδή, οι ιδιοτιμές του πίνακα.
2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα με τη χρήση της συνάρτησης eig( ). Τι συμπέρασμα εξάγεται ως προς την διαγωνοποίηση του πίνακα;
3. Με βάση τα αποτελέσματα της eig( ) και τη χρήση της εντολής inv( ) που επιστρέφει τον αντίστροφο πίνακα, να υπολογιστεί ο πίνακας $B = \mathrm{A} - P \cdot D \cdot P^{-1}$. Είναι το αποτέλεσμα το αναμενόμενο;
